Quelques outils de modélisation mathématique expérimentale

La modélisation mathématique d'un phénomène physique met en jeu des grandeurs physiques et on peut, dans un certain domaine de validité, souvent se ramener à des fonctions mettant en jeu deux variables (l'une étant dépendante de l'autre) et un certain nombre de paramètres.

I Les fonctions

Mathématiques	Physique
Une **fonction** *f*, définie sur un ensemble de départ E (appelée ensemble de définition de f), associe à tout x de E un unique élément f(x) d'un espace F, appelé image de x par la fonction f. (La fonction est dite fonction scalaire, ou numérique si les ensembles de départ et d'arrivée sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.) y=f(x) désigne l'équation de la courbe de f Lorsqu'on représente cette courbe, x est portée en abscisse, son image y, en ordonnée	On parle de **fonction** mais on écrit rarement f. En effet, en Physique, x et y représentent des grandeurs physiques. Il est donc essentiel de mentionner y. On note de la même façon la fonction et l'équation de la courbe : y = f(x) ou plutôt **y(x).** On parle de " la courbe représentant les variations de y en fonction de x ".

II Modélisation expérimentale

1) Présentation générale

Supposons que dans une expérience qualitative, on mette en évidence le fait que les valeurs d'une grandeur physique Y dépendent de celles d'une autre variable X, les autres grandeurs physiques étant maintenant constantes. Si on réalise un ensemble suffisant de mesures, on dispose alors de couples de valeurs (X, Y). On peut dans un premier temps, placer les points correspondants dans un repère, avec X en abscisse et Y en ordonnée et lisser la courbe (soit à la main, soit à l'aide d'un logiciel adapté), car il ne faut pas oublier que les mesures sont assorties d'incertitudes plus ou moins grandes.

Avant ou sans modéliser, on peut déjà savoir :

- dans le cas d'une fonction monotone, si elle est croissante ou décroissante et c'est souvent le cas en Physique ;
- dans le cas inverse, les coordonnées de ses extrema peuvent apporter des informations intéressantes

Modéliser revient alors à rechercher la fonction dont une portion de la courbe représentative se superpose "au mieux" à la courbe expérimentale. Une fois celle-ci trouvée, il ne faudra pas oublier qu'elle ne s'applique (plus ou moins bien) qu'au domaine de validité correspondant aux valeurs comprises entre les valeurs extrémales et qu'il est hasardeux de procéder à des extrapolations au-delà de ce domaine.

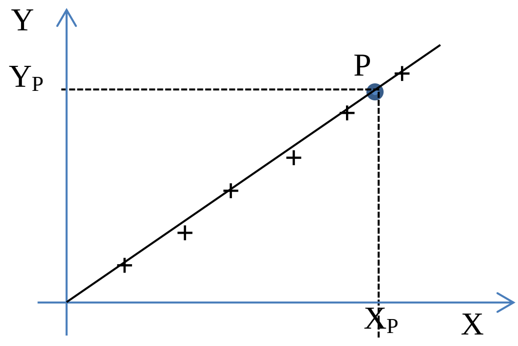
2) Les cas les plus simples

Ce sont les cas d'un ensemble de points "à peu près alignés".

a) Fonction linéaire

Les points sont à peu près alignés avec l'origine (0, 0) du repère.
On peut alors dire :
- que les valeurs de Y sont obtenues par une fonction linéaire de X, soit Y = aX :
- que Y est proportionnel à X

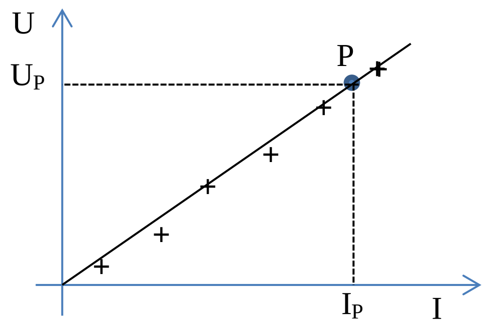
a apparaît alors comme le coefficient directeur de la droite, ou le coefficient de proportionnalité.



A la main, on trace avec une règle la droite qui passe au mieux par les points expérimentaux, puis, pour obtenir la valeur de a, on relève les coordonnées d'un point P de la droite, loin de l'origine (pour avoir les coordonnées les plus grandes et donc les plus précises possibles), et on divise l'ordonnée de ce point par son abscisse, soit $a = \frac{Y_P}{X_P}$.

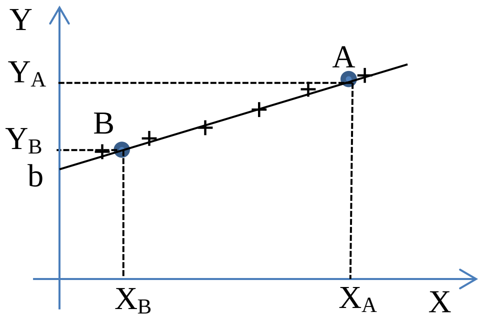
Avec un logiciel adapté, on demande une modélisation linéaire, c'est le logiciel qui fait le travail précédent, il n'y a plus qu'à relever la valeur du coefficient a (éventuellement donné avec son intervalle de confiance).

Exemple: Variation de la tension aux bornes d'un conducteur ohmique en fonction de l'intensité du courant qui le traverse
C'est la loi d'Ohm U = RI, avec R, la résistance du conducteur ohmique (R correspond à a).



b) Fonction affine

Les points sont à peu près alignés les uns avec les autres, mais pas avec l'origine.
On peut alors dire que les valeurs de Y sont obtenues par une fonction affine de X, soit Y = aX + b
- a apparaît alors comme le coefficient directeur de la droite, ou le taux d'accroissement
- b est l'ordonnée à l'origine

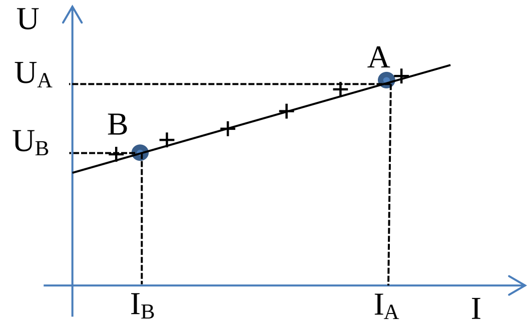


A la main, on trace avec une règle la droite qui passe au mieux par les points expérimentaux, puis, pour obtenir les valeurs de a et de b, on relève les coordonnées de deux points A et B de la droite, suffisamment éloignés l'un de l'autre, de façon à obtenir un système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} Y_A = aX_A + b \\ Y_B = aX_B + b \end{cases}$

- a s'obtient en "éliminant" b, donc en soustrayant une équation à l'autre :
$Y_B - Y_A = aX_B - aX_A = a(X_B - X_A)$, soit $a = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$;
- b s'obtient, soit en relevant directement la valeur de l'ordonnée à l'origine (pour X = 0), soit en reprenant les coordonnées de l'un des deux points et la valeur de a que l'on vient de calculer.
(on peut également choisir dès le début le point B de coordonnées (0, b), ce qui simplifie les calculs).

Avec un logiciel adapté, on demande une modélisation affine, c'est le logiciel qui fait le travail précédent, il n'y a plus qu'à relever les valeurs de a et de b (éventuellement donnés avec leurs intervalles de confiance).

Exemple : Variation de la tension aux bornes d'un moteur en fonction de l'intensité du courant qui le traverse.
U = rI + E, avec r, la résistance interne du moteur (qui correspond à a) et E, sa force contre-électromotrice (qui correspond à b).



2) Autres cas

Les points semblent appartenir à une courbe régulière qui n'est pas une droite. La fonction que l'on recherche n'est donc ni linéaire, ni affine.

Avec un logiciel adapté, on dispose d'une "banque" de fonctions (ou modèles mathématiques), dans lesquels on peut "faire des essais". Le meilleur modèle est alors celui qui conduit à des valeurs de paramètres ayant les intervalles de confiance les plus étroits possible (sauf, si on recherche un modèle particulier).

A la main, il faut se ramener à une droite. Bien que souvent utilisée, la démarche n'est pas du tout intuitive, elle est en général proposée pour vérifier la validité d'un modèle. Mais il vaut mieux la connaître.
Elle consiste à utiliser une ou deux fonctions intermédiaires pour se ramener à un X ou/et un Y liés entre eux par une relation de proportionnalité.

Exemples

Loi de la réfraction
On fait varier i_1 l'angle d'incidence, et on mesure les valeurs prises par i_2 l'angle de réfraction.
Si on trace la courbe représentative des variations de i_2 en fonction de i_1, on obtient une courbe qui traduit une fonction croissante mais qui dans un domaine compris entre 0 et 90° n'est pas modélisable par une fonction simple. Par contre, si on pose X = sin i_1 et Y = sin i_2, on obtient une droite passant pas l'origine traduisant une fonction linéaire, soit Y = a X ; on en déduit que sin i_2 = a sin i_1, cohérente avec la loi de la réfraction **n_1 sin i_1 = n_2 sin i_2** avec a = $\frac{n_1}{n_2}$.

Loi de Boyle-Mariotte

On fait varier le volume V d'une quantité n de gaz à température constante et on mesure les valeurs d la pression P. Si on trace la courbe représentative des variations de P en fonction de V, on obtient une courbe traduisant une fonction décroissante. Si on pose $X = \frac{1}{V}$ et Y = P, on obtient une droite passant par l'origine traduisant une fonction linéaire, soit Y = aX ; on en déduit que P = a $\frac{1}{V} = \frac{a}{V}$, cohérente avec l'expression **PV = a** (ou plus généralement avec l'équation des GP, PV = nRT, avec a = nRT).

Période d'un pendule simple

On fait varier la longueur L d'un pendule simple et (pour des petites oscillations), on mesure les valeurs de la période T du pendule. Si on trace la courbe représentative des variations de T en fonction de L, on obtient une courbe traduisant une fonction croissante. Si on pose $X = \sqrt{L}$ et Y = T, on obtient une droite passant par l'origine, traduisant une fonction linéaire, soit Y = aX ; on en déduit que T = $a\sqrt{L}$, cohérente avec l'expression $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$ avec $= \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$.

3ème Loi de Képler

Soit a le demi-grand axe de l'ellipse décrit par un satellite, et T sa période de révolution.
En posant X = a^3 et Y = T^2, la courbe représentative des variations de Y en fonction de X traduit une fonction linéaire, soit Y = kX ; on en déduit que $T^2 = k\ a^3$, cohérente la première expression de la 3ème Loi de Képler (le carré de la période est proportionnel au cube du demi-grand axe), et également avec la relation démontrée par Newton $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$, soit $T^2 = 4\pi^2\frac{a^3}{GM}$ avec $k = \frac{4\pi^2}{GM}$.