Introduction à l'utilisation des équations différentielles en Physique-Chimie

I Mise en évidence sur la loi de décroissance en radioactivité

Un échantillon radioactif contient à un instant t, un certain nombre de noyaux tous identiques dits radioactifs, c'est-à-dire capables de se désintégrer de façon purement aléatoire au cours du temps.
Soit N_0, le nombre de noyaux radioactifs initialement présents dans l'échantillon.
Au bout d'un temps t, la population de noyaux a diminué. Soir N, le nombre de noyaux présents à l'instant t

On cherche à établir la loi de décroissance, c'est-à-dire la loi donnant N en fonction de t, soit N(t).
N(t) est le nombre de noyaux radioactifs présent dans l'échantillon à la date t.

Pendant une durée très petite Δt, la variation du nombre de noyaux ΔN, lié à un phénomène aléatoire est :

- proportionnelle à N
- proportionnelle à Δt

(Ceci est caractéristique des phénomènes de décroissance de populations liée à un phénomène aléatoire)
Elle est donnée par la relation $\Delta N = - \lambda N(t)\, \Delta t$ avec λ, un coefficient de proportionnalité appelé constante radioactive, caractéristique du type de noyaux. N diminue ce qui justifie le signe -.

Ecrivons $\frac{\Delta N}{\Delta t} = - \lambda N$. Lorsque $\Delta t \to 0$, alors $\frac{\Delta N}{\Delta t} \to \frac{dN(t)}{\Delta t}$, dérivée de N(t) par rapport au temps : c'est la vitesse d'évolution de N, appelée également "activité".
Nous obtenons alors $\frac{dN(t)}{dt} = - \lambda N(t)$ ou $\boxed{\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0}$. Cette équation (du type **f' = af**, avec a constante) lie la fonction N(t) et sa dérivée première : c'est un exemple d'équation différentielle.

Rechercher l'expression de N(t), c'est "résoudre" cette équation différentielle.

En l'absence de cours de Maths sur les équations différentielles, on peut simplement **vérifier** une solution.
Pour cela, il faut exprimer la dérivée première avec ses paramètres inconnus, remplacer la fonction et sa dérivée première dans l'équation, factoriser le terme contenant le temps, et montrer que pour certaines expressions des paramètres, l'équation est vérifiée $\forall \mathbf{t}$. La connaissance des conditions initiales permet parfois d'obtenir les expressions d'autres paramètres.

Q1. Vérifier que $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$ est solution de cette équation et qu'elle respecte la condition initiale.
Q2. Procéder à une rapide étude de fonction pour vérifier que l'allure de la courbe vue en 1S lui correspond bien.

II Début de généralisation

1) En Mathématiques

Définition : **une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction** d'une variable x
Elle met en relation la fonction elle-même et certaines de ses dérivées (première, seconde….).
Résoudre l'équation différentielle, c'est chercher toutes les fonctions, définies sur un intervalle, qui satisfont l'équation.

Parmi les équations différentielles, on distingue en particulier les équations différentielles linéaires à coefficients constants et parmi celles-ci, les deux plus simples :

- **a.f '(x) + b.f(x) = c : équation différentielle *linéaire d'ordre 1 à coefficients constants*** avec les cas particuliers suivants :
  - si $a = 0, b \neq 0$, la solution est évidente : f(x) = c/b (fonction constante), cela n'est d'ailleurs pas considéré en règle générale comme équation différentielle ;

- si $a \neq 0$ et $b = 0$, chercher f(x) consiste à chercher une primitive de f '(x) = c/a ;
- si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $c = 0$, on parle d'équation différentielle *…* sans second membre, c'est un cas que l'on rencontre souvent.

- **a.f ''(x) + b.f '(x) + c. f(x) = d : équation différentielle *linéaire d'ordre 2 à coefficients constants***
  Cas particulier fréquent : a.f "(x) + c. f(x) = 0, équation différentielle *…* sans second membre

Q3. A quelle catégorie appartient l'équation différentielle rencontrée dans l'exemple vu en I ?

2) En Physique

On aboutit très souvent à des équations différentielles en particulier quand on cherche à établir l'expression d'une fonction traduisant les variations d'une grandeur physique u au cours du temps, soit u(t).

Mais avant d'aboutir à une équation différentielle, il aura fallu procéder à l'étude purement "physique" du phénomène, qui consiste en particulier à bien dénombrer les différentes grandeurs physiques qui interviennent, exploiter des relations entre ces grandeurs (lois, définitions), pour ne conserver qu'une seule grandeur variable en fonction du temps et ses dérivées.

Trouver l'ensemble des solutions d'une équation différentielle n'est en général pas suffisant, l'évolution de la grandeur physique en jeu dépendant également des conditions initiales. La résolution d'un problème de Physique doit donc également prendre en compte celles-ci.

III Deux applications importantes

1) Chute verticale dans un fluide

Un objet de masse m est lâché dans un fluide visqueux à un instant $t_0 = 0$, sans vitesse initiale (on prendra un axe vertical descendant Oz avec O, correspondant à la position de G à t = 0). Son mouvement est purement vertical, vers le bas.
Les frottements fluides exercés sur cet objet sont modélisables par une force $\vec{f} = -k\vec{v}$, avec $\vec{v}$, le vecteur vitesse du centre d'inertie de l'objet, et k, une constante caractéristique du fluide et des surfaces en contact.
La poussée d'Archimède est négligeable.

a) Etablissement de l'équation différentielle

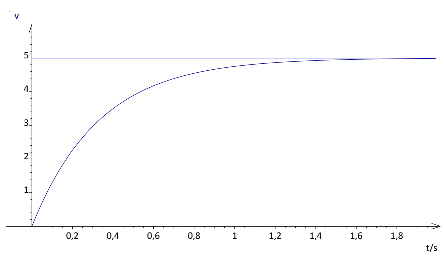
Q4. Faire un bilan des forces exercées sur l'objet, les représenter sur un schéma où on indiquera l'axe Oz choisi ;
Q5. Appliquer la $2^{ème}$ loi de Newton à l'objet dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.
Q6. Projeter la relation obtenue sur l'axe Oz et en déduire l'équation différentielle vérifiée par v(t).

b) Exploitation directe de l'équation différentielle

Si la durée de la chute est suffisante, une vitesse limite notée V_{lim} peut être atteinte.
Q7. Déduire de l'équation différentielle, l'expression de la vitesse limite en fonction de m, g et h.
Q8. Déduire de l'équation différentielle, l'expression de l'accélération à t = 0.
Q9. Traiter les questions précédentes sans recourir à l'équation différentielle.

c) Solution

En tenant compte des conditions initiales, la solution a pour expression $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$.
Q10. Procéder à une rapide étude de fonction pour vérifier que l'allure de la courbe ci-contre et les résultats précédents sont bien en cohérence avec son expression.

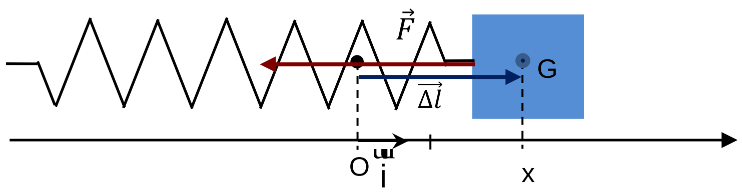


2) Oscillateur élastique

a) Oscillateur harmonique

On dispose d'un système constitué par un mobile de masse m accroché à un ressort de masse négligeable devant m et de raideur k. L'ensemble est disposé horizontalement sur un banc à air qui permet de considérer les frottements comme négligeables pendant la durée de l'étude ; l'oscillateur est alors un "oscillateur harmonique".

La force de rappel exercée par un ressort sur un objet qui lui est accroché a pour expression vectorielle $\vec{F} = -k\overrightarrow{\Delta l}$, avec k, la raideur du ressort et $\overrightarrow{\Delta l}$, le vecteur-allongement du ressort.



On tend le ressort et on lâche le mobile d'un point d'abscisse $x_0 > 0$ sans vitesse initiale.
Le mouvement étant rectiligne, on utilisera un axe Ox, orienté du ressort vers l'objet et d'origine O correspondant à la position de G à l'équilibre du système.

Q11. Quelles sont les autres forces exercées sur le mobile ? Que peut-on en dire ?
Les représenter sur le schéma.
Q12. Appliquer la deuxième loi de Newton au mobile, dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen, puis la projeter sur l'axe Ox.
Q13. Etablir l'équation différentielle vérifiée par x(t).
A quelle catégorie d'équations différentielles appartient celle-ci ?

La solution générale de cette équation différentielle à pour expression : $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \varphi\right)$ avec T_0, période propre de l'oscillateur dépendant du système, soit $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Compte tenu des conditions initiales, $X_m = x_0$ et $\varphi = 0$: la courbe représentative de x(t) est alors une sinusoïde de période T_0 telle que à t = 0, x = x_0.

b) Oscillateur soumis à des forces de frottement fluides

Supposons maintenant que les frottements de l'air ne soient plus négligeables et que cela se traduise par l'apparition d'une force de frottement fluide $\vec{f} = -k\,\vec{v}$.
Q14. Etablir la nouvelle équation différentielle du mouvement.