

MESURES ET INCERTITUDES

I Mesures, erreurs et incertitudes

Mesurer, c'est attribuer une valeur numérique m à une grandeur physique M dans un système d'unité choisi.

Le résultat de cette mesure s'exprime ainsi : $M = m u$

avec : M , symbole de la grandeur physique, m , valeur numérique de cette grandeur, soit donnée, soit résultant d'une mesure ou d'un calcul, u l'unité de cette grandeur.

La **valeur numérique vraie** m_0 est la valeur qui est toujours recherchée, c'est la valeur que l'on obtiendrait si la mesure était parfaite. Seulement, une mesure n'étant jamais parfaite, la valeur vraie est en général inaccessible.

Toute mesure est entachée d'**erreur**, notée e , l'erreur de mesure étant l'écart entre la valeur mesurée et la valeur vraie.

Les erreurs de mesure peuvent être dues à l'instrument de mesure, à l'opérateur ou à la variabilité de la grandeur mesurée, on les classe en deux catégories :

- l'erreur de mesure aléatoire

Lorsqu'un même opérateur répète plusieurs fois la mesure d'une même grandeur, les valeurs mesurées peuvent être différentes, cette dispersion est due à la qualité du mesurage et de l'instrument de mesure.

- l'erreur de mesure systématique.

Un appareil défectueux, mal étalonné ou utilisé incorrectement conduit à des valeurs mesurées proches les unes des autres mais éloignées de la valeur vraie. On parle alors d'erreur de mesure systématique.

Par définition l'erreur est inconnue si la valeur vraie est elle-même inconnue.

Evaluer l'erreur consiste à en donner une **estimation** appelée **incertitude de mesure**.

II Incertitude absolue, intervalle de confiance, incertitude relative

L'erreur de mesure étant inaccessible, on va en donner une estimation appelée **incertitude absolue** $U(M)$

(parfois noté $\Delta(M)$), $U(M)$ étant un nombre positif, associé à la même unité que celle de M .

L'estimation est étudiée dans le paragraphe suivant.

En TS, on se contentera d'exprimer l'incertitude absolue avec un seul chiffre significatif (l'arrondi supérieur).

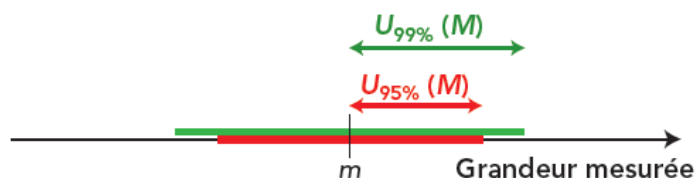
On considère alors que la valeur vraie M_0 se trouve avec une certaine probabilité, dans un **intervalle de confiance, centré sur m (valeur mesurée ou calculée), de demi-largeur égale à l'incertitude absolue $U(M)$**

soit $m - U(M) \leq M \leq m + U(M)$ que l'on écrit plus simplement $M = m \pm U(M)$

En général, la **largeur** de l'intervalle de confiance est choisie pour avoir **95% ou 99%** de chances de trouver la valeur vraie dans cet intervalle.

Le **nombre de chiffres significatifs** avec lequel la valeur numérique m est exprimée doit être en accord avec l'incertitude absolue : le **rang** du nombre (exprimé avec un CS en TS) correspondant à l'incertitude absolue et celui du dernier chiffre significatif de m doivent être les mêmes.

Exemple : $L = 16,3 \pm 0,2$ mm, le rang est ici le dixième de mm.



L'incertitude relative est donnée par $\frac{U(M)}{M}$ et s'exprime en général en % (voir paragraphe IV)

III Estimation de l'incertitude absolue

Selon que la mesure est effectuée une seule fois ou répétée un grand nombre de fois, l'incertitude ne s'évalue pas de la même façon.

1) Cas d'une mesure effectuée une seule fois

Il faut déduire l'incertitude de la connaissance du matériel utilisé (et éventuellement d'autres facteurs comme les facteurs humains conduisant à une mauvaise manipulation du matériel). Ce qui suit ne concerne que le matériel.

Pour les appareils de mesure gradués, l'incertitude absolue $U(M)$ sur la mesure correspond à la moitié de la plus petite graduation de l'appareil.

Exemple : On mesure une longueur de 11,3 cm avec une règle graduée au mm.

Le résultat de la mesure est donc : $L = 11,30 \pm 0,05$ cm ou $11,25$ cm $\leq L < 11,35$ cm

Parfois, une mesure nécessite une "double lecture", ce qui double l'erreur et conduit à une graduation entière.

Exemple : mesure de la période T sur un oscillogramme : cela nécessite de repérer l'abscisse de deux points et de les lire. Or, il a 0,2 div entre deux graduations, donc l'incertitude correspond à 0,1 div.

Si la sensibilité est de 5,0 ms/div. Cela donne $U(T) = 0,2 \times 5,0 = 1$ ms.

Pour la verrerie jaugée, l'incertitude $U(M)$ est parfois indiquée sur l'appareil lui-même.

Pour les appareils à affichage numérique, deux cas se présentent :

- soit la précision est donnée sur la fiche du constructeur et on applique la relation
- soit elle n'est pas donnée et on considère qu'elle est égale au plus petit écart possible entre deux valeurs affichables

2) Cas d'une mesure effectuée plusieurs fois : incertitude de répétabilité

Pour améliorer la précision finale, une mesure m peut être réalisée à n reprises. On procède alors à une étude statistique.

Méthode :

- calculer la **valeur moyenne notée** $\bar{m}$
- calculer l'écart-type :
Pour traduire les écarts entre la série de mesures et la valeur moyenne, on utilise l'**écart-type** σ_{n-1} . Il représente la "dispersion" de ces résultats par rapport à la valeur moyenne.

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (m_k - \bar{m})^2}{n-1}}$$

- en déduire l'**incertitude de "répétabilité"**, donnée par la relation suivante :

$$U(M) = \frac{k\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} \text{ ou } k \text{ est un coefficient associé au niveau de confiance et au nombre de mesures réalisées}$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20
$k_{95\%}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,20	2,16	2,13	2,11	2,09
$k_{99\%}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,11	3,01	2,95	2,90	2,86

- le résultat final est la moyenne des résultats affectée de "l'incertitude de répétabilité" : $M = \bar{m} \pm U(m)$

3) Cas d'une valeur déterminée par calcul à partir de valeurs mesurées d'autres grandeurs physiques

Pour une grandeur obtenue par calcul, l'incertitude sur la valeur de cette grandeur se calcule. La relation permettant de la calculer sera toujours donnée dans l'exercice ou le TP.

Exemple : Un pot de fleur de masse $m = 2,3 \pm 0,2$ kg tombe d'une hauteur $z = 4,5 \pm 0,1$ m. L'intensité de pesanteur $g = 9,81 \pm 0,01$ N.kg⁻¹. Déterminer la valeur de l'énergie potentielle de pesanteur du pot avant sa chute, soit $E_{pp} = mgz$. On donne l'expression de l'incertitude relative :

$$\frac{U(E_{pp})}{E_{pp}} = \sqrt{\left(\frac{U(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{U(g)}{g}\right)^2 + \left(\frac{U(h)}{h}\right)^2}$$

L'énergie potentielle de pesanteur calculée est $E_{pp\text{calc}} = 2,3 \times 4,5 \times 9,81 = 101,5$ J (on garde à priori plus de chiffres significatifs que nécessaire).

$$U(E_{pp})_{\text{calc}} = E_{pp\text{calc}} \sqrt{\left(\frac{U(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{U(g)}{g}\right)^2 + \left(\frac{U(h)}{h}\right)^2} = 101,5 \times \sqrt{\left(\frac{0,2}{2,3}\right)^2 + \left(\frac{0,01}{9,81}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{4,5}\right)^2} = 9 \text{ J}$$

Le résultat s'écrit sous la forme : $E_{pp} = (101 \pm 9) \text{ J}$

4) Incertitude en l'absence d'indication

Par convention, l'**incertitude** porte sur le dernier chiffre exprimé et vaut **une demi-unité de ce chiffre**

Exemple : $M = 1,4$ g signifie $M = 1,40 \pm 0,05$ g

IV Précision du résultat expérimental , incertitude relative et écart relatif

La **précision** recouvre deux aspects, la fidélité et la justesse.

1 : la fidélité est liée aux incertitudes de mesures et s'évalue grâce à l'**incertitude relative** $\frac{U(M)}{M}$, grandeur sans unité, souvent exprimée en % (et généralement avec un CS) .

Exemple : $\frac{U(I)}{I} = \frac{0,2}{43,7} = 0,0046 = 0,46 \% = 0,5 \% \text{ avec un chiffre significatif.}$

Plus l'incertitude relative est petite, plus la mesure est précise.

On cherchera donc toujours à minimiser l'incertitude relative.

Conséquences :

- lorsqu'on réalise une mesure unique, pour une incertitude absolue $U(M)$ donnée, il faut choisir de réaliser la mesure la plus grande possible.
- la multiplication des mesures permet quant à elle de diminuer l'incertitude de répétabilité

- 2 : la justesse qui traduit la correspondance entre la valeur mesurée m et la valeur vraie m_0 . Celle-ci ne peut être évaluée que lorsque m_0 est connue :
- soit en regardant si la valeur vraie se trouve dans l'intervalle de confiance, si celui-ci a été déterminé.
 - soit en calculant **l'écart-relatif** $\frac{|M-M_0|}{M_0}$, grandeur également sans unité, souvent exprimé en % (dans ce calcul, on doit exprimer les valeurs numériques avec le même nombre de CS)

Exemple : une détermination expérimentale de g à Paris a conduit à $g = 9,6 \pm 0,3 \text{ m.s}^{-2}$.

Or, la valeur vraie est de 9,8.

- 9,8 se trouve bien dans l'intervalle de confiance ;
- l'écart relatif est égal à $\frac{|9,6-9,8|}{9,8} = 0,02 = 2 \%$