

AP TS, approfondissement en Physique -Chimie

Calcul algébrique

Introduction

La plupart des problèmes de Physique rencontrés avant la TS consiste à déterminer la valeur numérique d'une grandeur physique **X** en utilisant les valeurs numériques fournies d'autres grandeurs physiques. On vous a toujours conseillé d'établir pour commencer une expression littérale de X puis de procéder à une application numérique, méthode dont vous n'avez pas forcément vu l'intérêt.

Or ce traitement littéral que l'on appelle **Calcul algébrique** en Mathématiques, est fondamental en Physique, car lui seul produit des relations permettant d'étudier des situations différentes selon les grandeurs physiques qui varient et celles qui ne varient pas (appelées souvent alors paramètres).

L'objectif de cette séance est de donner et d'exploiter quelques méthodes de calcul littéral.

On se limitera aux cas les plus simples où une seule relation (définition, loi, modèle mathématique, etc...) est en jeu.

I Cas où on considère une situation physique (soit un état d'un système)

1) Etude d'un exemple

Dans le cas des petites oscillations, la période T d'un pendule simple a pour expression $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ avec L, la longueur en m, g, l'intensité de la pesanteur en m.s^{-2} et T en s. On cherche la valeur de la longueur L du pendule permettant d'obtenir une certaine valeur de la période T, pour une intensité de pesanteur g donnée. L constitue une inconnue X. Chercher l'expression littérale de L en fonction de T et de g consiste à résoudre l'équation $f(L) = T$. On peut également dire que l'on va "extraire" ou "isoler" L

✓ Analysons la "situation de" L :

L est le numérateur du quotient $\frac{L}{g}$; $\frac{L}{g}$ se trouve dans une racine carrée ; la racine est multipliée par 2π

L est "cachée" dans l'équivalent de trois boîtes. Pour extraire L, on va exprimer par étapes successives le contenu de chaque boîte en partant de la plus grande :

$$\begin{aligned} 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} &= T \Rightarrow \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{T}{2\pi} && \text{(étape 1)} \\ \Rightarrow \frac{L}{g} &= \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} && \text{(étape 2)} \\ \Rightarrow L &= g \frac{T^2}{4\pi^2} && \text{(étape 3)} \end{aligned}$$

✓ Vérifions l'homogénéité de la relation obtenue :

$g(\text{en m.s}^{-2}) \frac{T^2(\text{en s}^2)}{4\pi^2}$ donne une grandeur en m, donc bien une longueur.

Qu'avons-nous fait mathématiquement à chaque étape ?

- dans l'étape 1, la multiplication par 2π dans le terme de gauche a été "supprimée" en divisant par 2π les deux termes, donc en appliquant aux deux termes l'opération réciproque de la multiplication ;
- dans l'étape 2, la racine carrée a été "supprimée" en portant les deux termes au carré, donc en appliquant la fonction réciproque de la racine carrée ;
- dans l'étape 3, la division par g a été "supprimée" en multipliant les deux termes par g, donc en appliquant l'opération réciproque de la division.

2) Généralisation

Soit l'équation à résoudre **$f(X) = Y$ pour une certaine valeur de Y**. Cette équation peut ne faire intervenir que les opérations simples, mais elle peut aussi contenir des fonctions $g(X)$ (inverse, carré, cube, racine

carrée, puissance de 10 ou autre, logarithme népérien, logarithme décimal, exponentielle, sinus, cosinus, tangente, etc.....) et parfois des fonctions composées $g(u(X))$ sous-jacentes .

Méthode

- avant toute chose, il convient d'analyser cette équation, en dessinant éventuellement les boîtes.
- ensuite, **procéder "étape par étape"**, chaque étape correspondant, souvent implicitement, soit à l'utilisation d'une "opération réciproque", soit à l'utilisation d'une "fonction réciproque" (les premières pouvant d'ailleurs être considérées comme un sous-ensemble des secondes). Savoir ce que l'on fait à chaque étape permet d'éviter les erreurs.

Exemples de fonctions réciproques : fonction "carré" et fonction "racine carrée", fonction sin et fonction Arcsinus, fonction "logarithme décimal" et fonction "puissance de 10", etc...(en faisant attention aux domaines de définitions)

- à la fin et quand cela est possible, vérifier l'homogénéité de la relation obtenue : pour cela, exprimer entre parenthèses toutes les unités de chaque grandeur physique intervenant dans l'expression de X et vérifier que l'on obtient bien l'unité de X

3) Applications

On détaillera les étapes en identifiant clairement la transformation effectuée à chaque étape et en s'aidant éventuellement de "boîtes".

1. Energie cinétique d'un objet "non relativiste" : $E_c = \frac{1}{2} mv^2$ avec E, l'énergie en J(Joules), m la masse en kg et v la vitesse en $m.s^{-1}$; exprimer v.
2. Période d'un pendule simple $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ avec L, la longueur en m, g l'intensité de la pesanteur en $m.s^{-2}$ et T en s ; exprimer g.
3. Force de gravitation exercée par la Terre sur un objet de masse m placé à l'altitude h,

$$F = \frac{GM_T m}{(R_T + h)^2}$$
 avec F en Newton (N), M_T la masse de la Terre en kg, m la masse de l'objet en kg, R_T le rayon de la Terre en m, h l'altitude en m et G la constante de gravitation universelle en $N.m^2.kg^{-2}$; exprimer M_T ; exprimer h.
4. Loi de la réfraction : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$; exprimer i_2 .
5. Loi de conjugaison des lentilles minces : $-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$ avec p, p' et f ' en mètres ; exprimer p'.

Au programme de TS :

6. La 3ème Loi de Kepler pour les objets du système solaire ayant une trajectoire circulaire s'écrit

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$
 avec T la période de révolution (en s), M_s la masse du Soleil (en kg), r le rayon de la trajectoire (en m) et G la constante de gravitation universelle (en $N.m^2.kg^{-2}$) ; exprimer M_s ; exprimer r.
7. Le niveau sonore $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ avec I, l'intensité sonore en $W(Watts).m^{-2}$ et L le niveau sonore en décibels ; exprimer I.
8. Relation de Lorentz sur la dilatation des durées : $\Delta t_m = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ avec $v < c$, les durées en s, les vitesses en unités identiques ; exprimer $\frac{v}{c}$.

9. Soit l'équation de la trajectoire d'un projectile dans un repère (O,x,y) pour $x > 0$:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 (\cos \alpha)^2} . x^2 + \tan \alpha . x + h$$

Exprimer la valeur de la vitesse initiale qui, pour un certain angle de tir α permet d'avoir une portée (valeur de x pour y = 0) égale à une certaine distance notée D.

II Cas où on considère deux situations (deux états d'un même système ou deux systèmes analogues)

1) Etude d'un exemple

On considère deux pendules simples utilisés au même endroit (g identique donc, mais non donné).

Le premier de longueur L_1 a une période T_1 et le second de longueur L_2 a une période T_2 .

On donne les valeurs numériques de L_1 , L_2 et T_1 et on veut déterminer la valeur de T_2 .

Il faut donc au préalable établir l'expression littérale de T_2 en fonction de L_1 , L_2 et T_1 .

On connaît la relation $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$, applicable dans les deux cas.

On se ramène donc à un système de deux équations :

$$\begin{cases} T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1}{g}} \\ T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L_2}{g}} \end{cases}$$

On remarque que la relation peut s'écrire sous la forme $T = 2\pi \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{L}$.

Or g étant identique, $\frac{2\pi}{\sqrt{g}}$ est un invariant (ou terme constant) que l'on peut noter a , soit $T = a \sqrt{L}$

Le système d'équations devient $\begin{cases} T_1 = a \sqrt{L_1} \\ T_2 = a \sqrt{L_2} \end{cases}$

Deux sous-méthodes sont alors possibles :

- on transforme le système pour isoler l'invariant (c'est la méthode la plus "physique" car de nombreuses lois physiques s'écrivent déjà ainsi (voir l'exemple de la loi de Képler)

$$\begin{cases} \frac{T_1}{\sqrt{L_1}} = a \\ \frac{T_2}{\sqrt{L_2}} = a \end{cases} \text{ et on en déduit } \frac{T_2}{\sqrt{L_2}} = \frac{T_1}{\sqrt{L_1}} \text{ soit } T_2 = T_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

- on divise membre à membre une des deux équations par l'autre et on élimine ainsi directement l'invariant.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{L_1}}, \text{ soit } T_2 = T_1 \frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{L_1}} = T_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}.$$

2) Généralisation

Cas où l'étude physique du problème conduit à un système du type :

$$\begin{cases} Y_1 = f(X_1) \\ Y_2 = f(X_2) \end{cases} \text{ avec par exemple } Y_2 \text{ inconnue et } X_1, X_2 \text{ et } Y_1 \text{ connues.}$$

Les techniques de résolution sont toujours les mêmes :

- mis en évidence de l'invariant donc du terme commun aux deux équations ;

- détermination de l'expression de Y_2 en fonction de X_1 , Y_1 et X_2 par élimination de l'invariant

✓ soit par substitution : on exprime l'invariant a en fonction de X_1 et Y_1 , puis on remplace a par cette expression dans celle donnant Y_2 en fonction de X_2 .

✓ soit, selon les cas, par addition, soustraction, multiplication, division membre à membre des deux équations.

3) Applications

1. On connaît l'énergie cinétique E_{c1} d'une particule non relativiste de masse m et de vitesse v_1 .

Déterminer l'énergie cinétique E_{c2} de cette même particule lorsqu'elle est animée de la vitesse v_2 .

2. La puissance sonore P émise par une source se répartit sur des sphères de rayon r . L'intensité sonore étant

définie comme la puissance surfacique d'une onde sonore, $I = \frac{P}{S_{\text{sphère}}} = \frac{P}{4\pi r^2}$.

On connaît la valeur de l'intensité sonore I_1 à la distance r_1 de la source.

Déterminer l'intensité sonore I_2 à la distance r_2 de la source.

3. On connaît la valeur de la période de révolution T_T de la Terre autour du Soleil ainsi que sa distance r_T au

Soleil. Déterminer la valeur de la distance r au Soleil d'une planète quelconque en orbite circulaire,

connaissant sa période de révolution T .