AP TS, soutien en Physique -Chimie

Séance 1 : Calcul algébrique, extraction d'une variable

Introduction

On rencontre souvent des situations dans lesquelles il est question d'obtenir l'expression littérale d'une grandeur X, considérée à priori comme une variable, pour éventuellement en calculer une valeur par la suite. On considère ici le cas où on dispose d'une équation de type $f(X) = k$. Déterminer l'expression littérale de X revient à résoudre littéralement cette équation. On doit alors faire ce que l'on appelle en Mathématiques du "**calcul algébrique**".

I Etude d'un exemple

La période d'un pendule simple a pour expression $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ avec L, la longueur en m, g, l'intensité de la pesanteur en $m.s^{-2}$ et T en s ; exprimer L en fonction de T et de g.

Analysons la "situation de" L :

L constitue le numérateur d'un quotient, $\frac{L}{g}$; $\frac{L}{g}$ se trouve dans une racine ; la racine est multipliée par 2π
L est "cachée" dans l'équivalent de trois boîtes.

$$\begin{aligned} 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = T &\Rightarrow \sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{T}{2\pi} && \text{(étape 1)} \\ \Rightarrow \frac{L}{g} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} &&& \text{(étape 2)} \\ \Rightarrow L = g \frac{T^2}{4\pi^2} &&& \text{(étape 3)} \end{aligned}$$

Vérification de l'homogénéité : $g(m.s^{-2}) \frac{T^2(s^2)}{4\pi^2}$ donne bien une grandeur en m, donc une longueur.

Qu'avons-nous fait mathématiquement à chaque étape ?

- dans l'étape 1, la multiplication par 2π dans le terme de gauche a été "supprimée" en divisant par 2π les deux termes, donc en appliquant aux deux termes l'opération réciproque de la multiplication ;
- dans l'étape 2, la racine carrée a été "supprimée" en portant les deux termes au carré, donc en appliquant la fonction réciproque de la racine carrée ;
- dans l'étape 3, la division par g a été "supprimée" en multipliant les deux termes par g, donc en appliquant l'opération réciproque de la division.

II Généralisation

Soit l'équation à résoudre $f(X) = k$. Cette équation peut ne faire intervenir que les opérations simples, mais elle peut aussi contenir des fonctions $g(X)$ (inverse, carré, cube, racine carrée, puissance de 10 ou autre, logarithme népérien, logarithme décimal, exponentielle, sinus, cosinus, tangente, etc.....) et parfois des fonctions composées $g(u(X))$ sous-jacentes.

Méthode

- avant toute chose, il convient d'analyser cette équation, en dessinant éventuellement les boîtes.
- ensuite, **procéder "étape par étape"**, chaque étape correspondant, souvent implicitement, soit à l'utilisation d'une "opération réciproque", soit à l'utilisation d'une "fonction réciproque" (les premières pouvant d'ailleurs être considérées comme un sous-ensemble des secondes). Savoir ce que l'on fait à chaque étape permet d'éviter les erreurs.

Exemples de fonctions réciproques : fonction "carré" et fonction "racine carrée", fonction sin et fonction arcsinus, fonction "logarithme décimal" et fonction "puissance de 10", etc...(en faisant attention aux domaines de définitions)

- à la fin et quand cela est possible, vérifier l'homogénéité de la relation obtenue : pour cela, exprimer entre parenthèses toutes les unités de chaque grandeur physique intervenant dans l'expression de X et vérifier que l'on obtient bien l'unité de X

III Applications

On détaillera les étapes en identifiant clairement la transformation effectuée à chaque étape.

1. $M = \frac{m}{n}$, avec M la masse molaire en g.mol^{-1} , m la masse en g, n la quantité de matière en mol ; extraire m.
2. Longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{f}$ (avec λ la longueur d'onde en m, c la célérité de l'onde en m.s^{-1} , f la fréquence en Hertz ; extraire f.
3. Période d'un pendule simple $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ avec L la longueur en m, g l'intensité de la pesanteur en m.s^{-2} et T en s ; extraire g.
4. Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ avec E, l'énergie en J(Joules), m la masse en kg et v la vitesse en m.s^{-1} ; extraire v.
5. Energie potentielle élastique : $E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$, avec x, abscisse de position en m, k, la raideur d'une ressort en N.m^{-1} ; extraire x pour $x > x_0$, puis pour $x < x_0$.
6. Force de gravitation exercée par la Terre sur un objet de masse m placé à l'altitude h,

$$F = \frac{GM_T m}{(R_T + h)^2}$$
 avec F en Newton (N), M_T la masse de la Terre en kg, m la masse de l'objet en kg, R_T le rayon de la Terre en m, h l'altitude en m et G la constante de gravitation universelle en $\text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$; extraire M_T et h.
7. Relation de Lorentz sur la dilatation des durées : $\Delta t_m = \frac{\Delta t_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ avec $v < c$, les durées en s, les vitesses en unités identiques ; extraire $\frac{v}{c}$.
8. La 3ème Loi de Kepler pour les objets du système solaire ayant une trajectoire circulaire s'écrit $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$ avec T la période de révolution (en s), M_S la masse du Soleil (en kg), r le rayon de la trajectoire (en m) et G la constante de gravitation universelle en $\text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$; extraire M_S et r.
9. Loi de conjugaison des lentilles minces : $-\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$ avec p, p' et f en mètres ; extraire p'.
10. Niveau sonore $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ avec I, l'intensité sonore en W(Watts).m^{-2} et L le niveau sonore en décibels ; extraire I.
11. Loi de la réfraction : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$; extraire i_2 .