UTILISATION DES VECTEURS ET DES FONCTIONS VECTORIELLES EN PHYSIQUE

I Grandeurs vectorielles

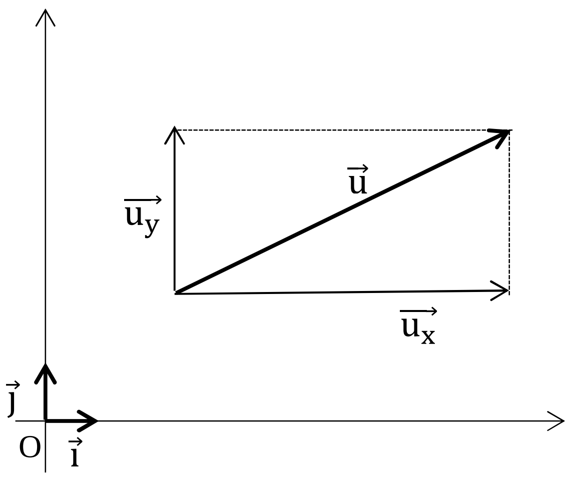
1) Rappels

Quand une grandeur physique est caractérisée par une direction, un sens et une valeur numérique associée, on la modélise par un vecteur et on parle de grandeur vectorielle.
Soit $\vec{\boldsymbol{u}}$ cette grandeur (la valeur associée est alors égale à la norme du vecteur, soit $u = \|\vec{u}\|$ suivie d'une unité).
Exemple : les forces $\vec{F}$, dont la valeur associée notée F s'exprime en Newtons (N).

2) Coordonnées

En Mathématiques : Dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont définis par :
$\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$. Alors sa norme $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)

En Physique : Pour garder à l'esprit le fait que les coordonnées se rapportent à une grandeur physique, les notations sont différentes.
Les **coordonnées** de $\vec{u}$ (parfois appelées composantes scalaires) sont notées $\boldsymbol{u_x}$, $\boldsymbol{u_y}$ **et** $\boldsymbol{u_z}$ (sauf quand les coordonnées sont celles d'un point).
On a alors : $\vec{u} = u_x\,\vec{\imath} + u_y\,\vec{\jmath} + u_z\,\vec{k}$ avec
$u = \|\vec{u}\| = \sqrt{(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)}$
On utilise parfois les **composantes vectorielles** du vecteur, **notées** $\overrightarrow{\boldsymbol{u_x}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{u_y}}$ ***et*** $\overrightarrow{\boldsymbol{u_z}}$ telles que $\overrightarrow{u_x} = u_x\,\vec{\imath}$ par exemple.
Si $u_x > 0$, alors $\overrightarrow{u_x}$ a le même sens que $\vec{\imath}$,
si $u_x < 0$, alors $\overrightarrow{u_x}$ a un sens opposé à celui de $\vec{\imath}$



Pour résumer : $\boxed{\vec{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{u_y}} + \overrightarrow{\boldsymbol{u_z}} = \boldsymbol{u_x}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{u_y}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{u_z}\,\vec{\boldsymbol{k}}}$

Rmq : quand un vecteur n'a qu'une coordonnée, par exemple u_x, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2}$ et réciproquement $u_x = \pm\|\vec{u}\|$.

II Fonctions vectorielles du temps

Si la grandeur physique modélisée par le vecteur $\vec{u}$ varie au cours du temps, on peut la considérer comme une fonction du temps, notée $\vec{u}\,(t)$.
Dans un repère cartésien orthonormé, et dans la mesure où le repère ne varie pas au cours du temps, ce sont les coordonnées qui varient au cours du temps et on peut écrire : $\vec{u}\,(t) = u_x(t)\,\vec{\imath} + u_y(t)\,\vec{\jmath} + u_z(t)\,\vec{k}$.

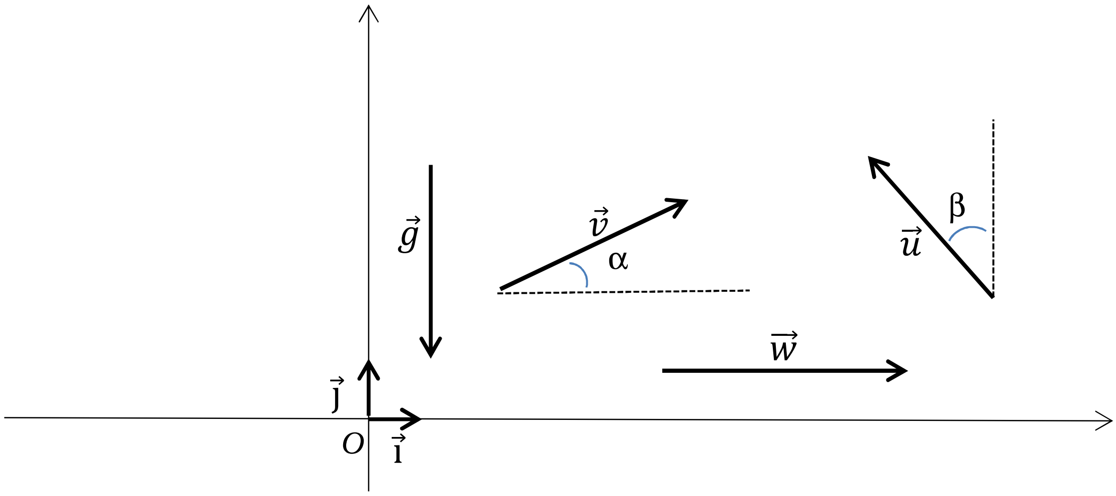
On peut de même définir sa dérivée et sa dérivée seconde, susceptibles de correspondre également à d'autres grandeurs physiques vectorielles.

Dérivée : $\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(u_x\,\vec{\imath} + u_y\,\vec{\jmath} + u_z\,\vec{k})$
En utilisant les propriétés des dérivées, soit $(f + g)' = f' + g'$ et $(af)' = af'$, on obtient :
$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(u_x\,\vec{\imath}) + \frac{d}{dt}(u_y\,\vec{\jmath}) + \frac{d}{dt}(u_z\,\vec{k}) = \frac{d\,u_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{d\,u_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d\,u_z}{dt}\vec{k}$
Les coordonnées de la dérivée du vecteur sont les dérivées des coordonnées de ce vecteur.

De la même façon, la dérivée seconde : $\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$
Les coordonnées de la dérivée seconde du vecteur sont les dérivées secondes des coordonnées de ce vecteur.

Application

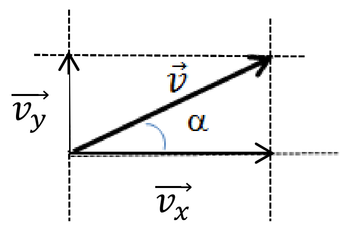
On veut exprimer les coordonnées dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) des vecteurs représentés ci-dessous, en fonction de leur valeur associée et éventuellement de l'angle donnant leur direction.
Commencer par identifier les vecteurs qui n'ont qu'une coordonnée.
Pour les autres, construire tout d'abord graphiquement leurs composantes vectorielles (des triangles rectangles contenant l'angle donné doivent nettement apparaître).



Correction :
Les vecteurs qui n'ont qu'une coordonnée sont $\vec{w}$ et $\vec{g}$ car le premier est parallèle à l'axe Ox et le second parallèle à l'axe Oy.

$\vec{w} = w_x\,\vec{\imath}$, donc $w_x = \pm\|\vec{w}\,\|$; comme $\vec{w}$ et $\vec{\imath}$ sont de même sens, $w_x > 0$ et on obtient $w_x = +\|\vec{w}\,\| = w$
$\vec{g} = g_y\,\vec{\jmath}$, donc $g_y = \pm\|\vec{g}\,\|$; comme $\vec{g}$ et $\vec{\jmath}$ sont de sens opposés, $g_y < 0$ et on obtient $g_y = -\|\vec{g}\,\| = -g$

pour $\vec{v}$:

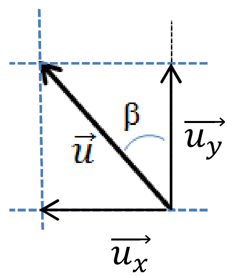


On trace des parallèles aux axes pour faire apparaître les composantes vectorielles.
$\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v_x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v_y}} = \boldsymbol{v_x}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{v_y}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$
Ici, les deux coordonnées sont positives.

Deux triangles rectangles apparaissent.
Dans chacun des deux, l'hypoténuse correspond à la valeur associée au vecteur et les deux autres cotés aux valeurs absolues des coordonnées. $|\boldsymbol{v_x}|$ correspond au côté adjacent de l'angle α et $|\boldsymbol{v_y}|$ au côté opposé, donc $|\boldsymbol{v_x}| = \mathrm{v}\cos\alpha$ *et* $|\boldsymbol{v_y}| = \mathrm{v}\sin\alpha$, soit comme les coordonnées sont positives :

$$\begin{cases} \boldsymbol{v_x} = v\,cos\,\alpha \\ \boldsymbol{v_y} = v\,sin\,\alpha \end{cases}$$

pour $\vec{u}$



On trace des parallèles aux axes pour faire apparaître les composantes vectorielles.
$\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{u_x}} + \overrightarrow{\boldsymbol{u_y}} = \boldsymbol{u_x}\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{u_y}\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}$
Ici, $\boldsymbol{u_x} < \boldsymbol{0}$ **et** $\boldsymbol{u_y} > \boldsymbol{0}$ **.**
D'autre part $|\boldsymbol{u_x}|$ correspond au côté opposé de l'angle β et $|\boldsymbol{u_y}|$ au côté adjacent.
donc $|\boldsymbol{u_x}| = u\,sin\,\beta$ *et* $|\boldsymbol{u_y}| = u\,cos\,\beta$, soit au final, en tenant compte des signes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_x} = -\,u\,sin\,\beta \\ \boldsymbol{u_y} = +\,\mathrm{v}\,cos\,\beta \end{cases}$$